Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: aplicaciones e interpretación
Nivel superior
Prueba 2

Viernes 7 de mayo de 2021 (mañana)

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2221 – 7222

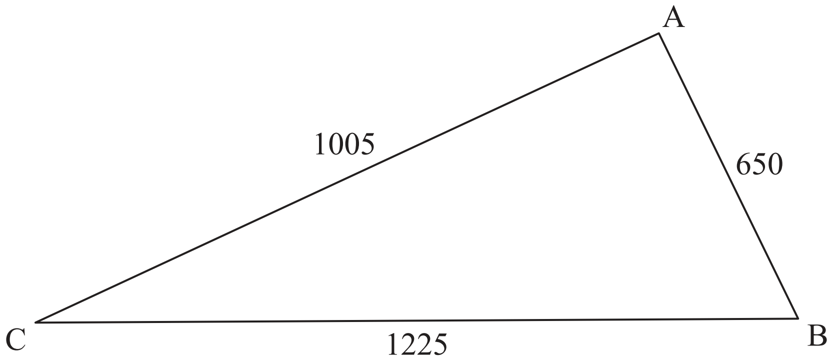
9 páginas

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 15]

Un agricultor posee un terreno con la forma de un triángulo ABC tal que $\mathrm{AB} = 650\,\mathrm{m}$, $\mathrm{AC} = 1005\,\mathrm{m}$ y $\mathrm{BC} = 1225\,\mathrm{m}$.

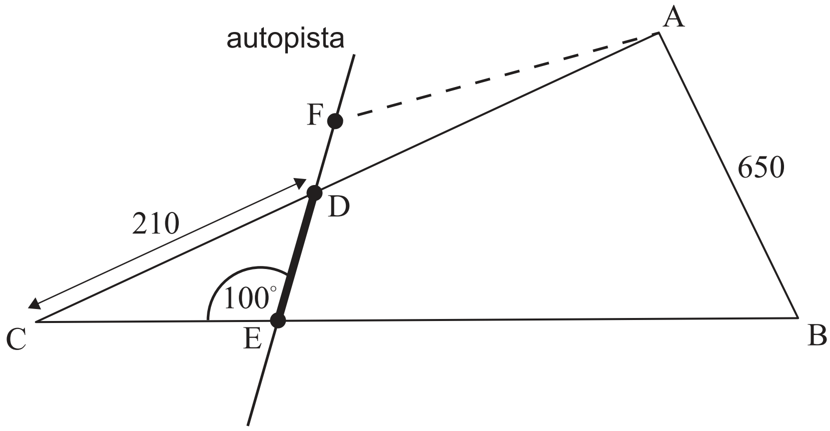
la figura no está dibujada a escala



(a) Halle el tamaño de $\mathrm{A\hat{C}B}$. [3]

El ayuntamiento del pueblo tiene previsto construir una autopista que cruzará los bordes del terreno en los puntos D y E, donde $\mathrm{DC} = 210\,\mathrm{m}$ y $\mathrm{C\hat{E}D} = 100^{\circ}$, tal y como se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(b) Halle DE. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

El ayuntamiento quiere construir allí un aparcamiento. Le piden al agricultor que les ceda la parte del terreno representada por el triángulo DCE. A cambio, el agricultor recibiría un triángulo de igual área ADF, donde F está en la misma recta que D y que E, tal y como se muestra en la figura anterior.

(c) Halle el área del triángulo DCE. [5]

(d) Estime DF. Puede suponer que la anchura de la autopista es igual a cero. [4]

2. [Puntuación máxima: 16]

Se sabe que los pesos de los gatos persas macho siguen una distribución normal de media $6{,}1\,\mathrm{kg}$ y varianza igual a $0{,}5^2\,\mathrm{kg}^2$.

(a) Dibuje aproximadamente una figura donde se muestre esta información. [2]

(b) Halle la proporción de gatos persas macho que pesan entre $5{,}5\,\mathrm{kg}$ y $6{,}5\,\mathrm{kg}$. [2]

De esta población se toma un grupo de 80 gatos persas macho.

(c) Determine el número esperado de gatos de este grupo cuyo peso será menor de $5{,}3\,\mathrm{kg}$. [3]

A esos gatos macho se les unen ahora 80 gatos persas hembra. Los gatos hembra se toman de una población cuyos pesos siguen una distribución normal de media $4{,}5\,\mathrm{kg}$ y desviación típica igual a $0{,}45\,\mathrm{kg}$.

(d) Se escogen al azar diez gatos hembra.

(i) Halle la probabilidad de que exactamente uno de ellos pese más de $4{,}62\,\mathrm{kg}$.

(ii) Sea N el número de gatos que pesan más de $4{,}62\,\mathrm{kg}$.

Halle la varianza de N. [5]

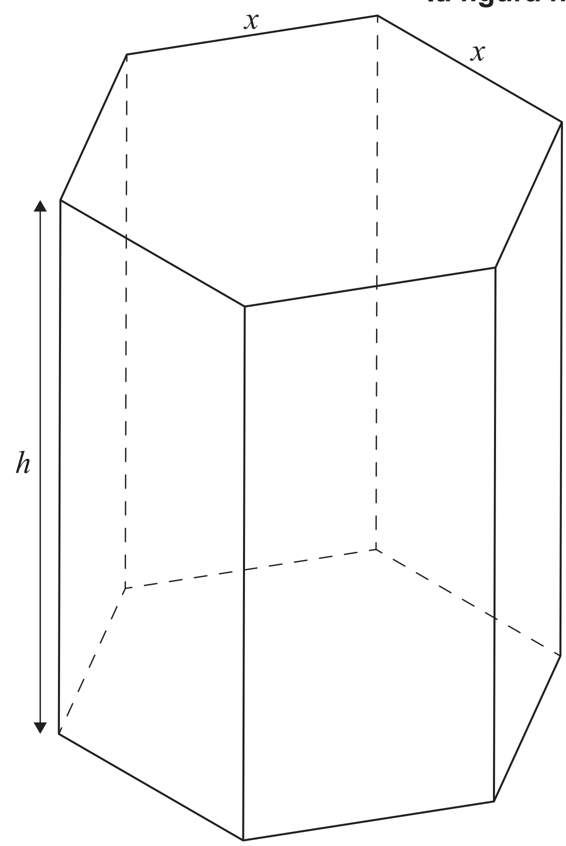
Se escoge al azar un gato de entre todos los 160 gatos.

(e) Halle la probabilidad de que el gato sea hembra, sabiendo que su peso es mayor de $4{,}7\,\mathrm{kg}$. [4]

3. [Puntuación máxima: 15]

Una caja de bombones hueca se fabrica con la forma de un prisma recto de base hexagonal regular. La altura del prisma es $h\,\text{cm}$, y la parte superior y la base del prisma tienen lados de $x\,\text{cm}$ de longitud.

la figura no está dibujada a escala



(a) Sabiendo que $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, muestre que el área de la base de la caja es igual a $\frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$. [2]

(b) Sabiendo que el área total de la superficie externa de la caja es igual a $1200\,\text{cm}^2$, muestre que el volumen de la caja se puede expresar así: $V = 300\sqrt{3}\,x - \frac{9}{4}x^3$. [5]

(c) Dibuje aproximadamente el gráfico de $V = 300\sqrt{3}\,x - \frac{9}{4}x^3$ para $0 \le x \le 16$. [2]

(d) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$. [2]

(e) Halle el valor de x que maximiza el volumen de la caja. [2]

(f) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el máximo volumen posible de la caja. [2]

4. [Puntuación máxima: 18]

En un pequeño pueblo hay dos consultorios médicos: uno es del doctor Black y el otro es del doctor Green. Después de cada año, se observa que el $3{,}5\%$ de los pacientes del doctor Black se han pasado al consultorio del doctor Green y que el 5% de los pacientes del doctor Green se han pasado al consultorio del doctor Black. Se puede ignorar cualquier otra pérdida o ganancia de pacientes que tengan los consultorios.

Al comienzo de un año concreto, el doctor Black tenía 2100 pacientes en su consultorio, frente a los 3500 pacientes que tenía el doctor Green.

(a) Escriba una matriz de transición $\boldsymbol{T}$ que refleje el movimiento anual de pacientes entre los consultorios. [2]

(b) Halle una predicción para la razón entre el número de pacientes que tendrá el doctor Black al cabo de dos años y el que tendrá el doctor Green. [2]

(c) Halle una matriz $\boldsymbol{P}$, formada por elementos enteros, tal que $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$, donde $\boldsymbol{D}$ es una matriz diagonal. [6]

(d) A partir de lo anterior, muestre que la matriz de transición a largo plazo $\boldsymbol{T}^{\infty}$ viene dada por

$$\boldsymbol{T}^{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} & \frac{10}{17} \\ \frac{7}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix}.$$ [6]

(e) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, determine la razón esperada entre el número de pacientes que tendría el doctor Black a largo plazo y el que tendría el doctor Green. [2]

5. [Puntuación máxima: 14]

Hank monta en su jardín un comedero de pájaros para que las aves de la zona tengan alimento. Hank se da cuenta de que hay un ave concreta —una urraca de gran tamaño— que lo visita varias veces al mes, y le pone de nombre Bill. Hank modeliza el número de veces al mes que Bill acude a su jardín mediante una distribución de Poisson de media $3,1$.

(a) Utilizando el modelo de Hank, halle la probabilidad de que Bill acuda al jardín exactamente cuatro veces durante un mes concreto. [1]

(b) A lo largo de 3 meses consecutivos, halle la probabilidad de que Bill acuda al jardín:

(i) Exactamente 12 veces

(ii) Únicamente durante el primer mes y el tercer mes [5]

(c) Halle la probabilidad de que, a lo largo de un período de 12 meses, haya exactamente 3 meses en los que Bill no acude nunca al jardín. [4]

Después del primer año, una serie de crías de urraca empiezan a acudir al jardín de Hank. Se puede suponer que cada una de estas crías de urraca acude al jardín de manera aleatoria e independiente y que el número de veces al mes que cada cría de urraca visita el jardín se puede modelizar mediante una distribución de Poisson de media $2,1$.

(d) Determine el menor número de urracas que hacen falta, incluida Bill, para que la probabilidad de que Hank reciba en su jardín al menos 30 visitas de urracas al mes sea mayor que $0,2$. [4]

6. [Puntuación máxima: 15]

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x. La velocidad de P es $v\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ en el instante t segundos, donde $v = -2t^2 + 16t - 24$, para $t \geq 0$.

(a) Halle los instantes en los que P está en reposo instantáneo. [2]

(b) Halle el módulo de la aceleración de la partícula a los 6 segundos. [4]

(c) Halle la mayor celeridad que alcanza P en el intervalo $0 \leq t \leq 6$. [2]

(d) La partícula empieza en el origen O. Halle una expresión que permita calcular el desplazamiento de P respecto a O en el instante t segundos. [4]

(e) Halle la distancia total que ha recorrido P en el intervalo $0 \leq t \leq 4$. [3]

7. [Puntuación máxima: 17]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -4x$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x - 2y$$

(a) Halle los valores propios y los correspondientes vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. [6]

(b) A partir de lo anterior, escriba la solución general del sistema. [2]

(c) Determine, justificando su respuesta, si el punto de equilibrio $(0, 0)$ es estable o es inestable. [2]

(d) Halle el valor de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en:

(i) $(4, 0)$

(ii) $(-4, 0)$ [3]

(e) Dibuje aproximadamente un retrato de fase para la solución general de ese sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, para $-6 \le x \le 6$, $-6 \le y \le 6$. [4]

Fuentes: